УДК 331.37

АГРЕГИРОВАННЫЙ РЕЙТИНГ КАК РЕЗУЛЬТАТ СПРАВЕДЛИВО ОРГАНИЗОВАННОГО ТУРНИРА

Кальницкий В.С., Молоков И.Е.
Военная академии материально-технического обеспечения
имени генерала армии А. В. Хрулёва, г. Санкт-Петербург
e-mail: skalnitsky@hotmail.com, mie78italy@mail.ru

Аннотация. *В статье обсуждаются некоторые аспекты использования операций агрегирования рейтингов, связанные с реализацией этих операций в виде справедливых турниров. Показано, что хорошо известный и часто применяемый метод Борда уже для трёх рейтингов не может быть описан как результат справедливо организованного турнира, даже если в качестве попарных сравнений используется он сам. В статье дается точное математическое описание указанной проблематики.*
Ключевые слова: *агрегированный рейтинг, чартерный анализ, метод Борда.*

Введение. В статье обсуждаются методологические особенности применения метода Борда и Парето анализа для целей составления агрегированных ранжированных списков объектов. Приведенный анализ опирается на широкие исследования, проведенные авторами для различных сфер их применения. В результате глубокого математического анализа проблематики составления агрегированных рейтингов был сформулирован ряд положений и требований к бинарным операциям на пространстве упорядоченных разбиений, которые с точки зрения авторов являются «естественными», дана наглядная геометрическая интерпретация множественных аспектов исследуемых операций.

В статье [3] описана методика ранжирования процессов на основе Парето анализа, названной в статье чартерным анализом, так дает возможность выявить потенциально качественные процессы в совокупности процессов различной продолжительности существования, по аналогии с составлением музыкальных чартов. В основе методики лежит Парето анализ двумерного массива качественных показателей, один из которых – время существования процесса. Каждый чарт в этой методике представляет собой Парето слой и, будучи пронумерованными, указанные слои задают упорядоченное разбиение, которое может восприниматься как Парето сумма двух упорядочиваний по различным признакам (здесь, качество и время существования). Результаты такого анализа могут быть использованы для принятия управленческих решений во многих сферах человеческой деятельности – бизнесе, искусстве, науке, государственном управлении. В статье [4] рассмотрена проблема составления агрегированного рейтинга объектов [1, 2] по двум данным рейтингам с точки зрения известных алгебраических структур. На основе Парето анализа построена операция агрегирования, обладающая естественными алгебраическими свойствами. Сама тесная связь чартерного анализа с Парето анализом была указана в статье [5]. В статье [6] авторами предложено использовать данную методику для составления агрегированных рейтингов вузов. Для целей анализа Парето анализ дополнен авторами операцией редукции, гарантирующей хорошее алгебраическое поведение объектов. Наиболее содержательным и неожиданным свойством построенной операции явилась коммутативность, доказательству которого и посвящена работа. В ней рассмотрена проблема скаляризации (арифметизации) исчисления пользовательских предпочтений. История этого вопроса началась в 1770 году, когда французский математик Жан-Шарль де Борда предложил метод арифметизации системы голосования для более справедливого учета голосов выборщиков в условиях множества кандидатов. Этот метод, носящий его имя, используется и в современности и имеет множество модификаций. Одна из проблем этого метода заключается в том, что к предпочтениям, как к порядковым величинам, применяются арифметические операции. Вопрос о естественности применяемых арифметических операций является открытым и является источником критики. Одним из аспектов критики является отсутствие «естественных» свойств с точки зрения алгебры у используемых манипуляций с предпочтениями. Данная статья посвящена одному из естественных свойств n-арной операции, такому, как бинарная разложимость.

Турнир рейтингов.

Рассмотрим совокупность всех возможных рейтингов. Операция агрегирования n рейтингов в новый рейтинг рассматривается с математической точки зрения как операция от n аргументов. В частности, при n=2, это так называемая *бинарная* операция. В частности, метод Борда определен для любого конечного n.

Турниром n рейтингов называется некоторая последовательность применения бинарной операции к данному набору рейтингов, или, более точно, соответствует расстановке скобок на последовательности элементов из списка предъявленных рейтингов фиксированной длины. Таким образом, бинарная разложимость n-арной операции интерпретируется как существование турнира, порождающего такие же результаты.

Пусть $(G,\oplus)$ – группоид с бинарной операцией $\oplus : G \times G \to G$. Группоид $(G,\oplus)$ будем называть

а) $\mathfrak{IK}$-*группоидом*, если в нем выполнены аксиомы $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}$;

б) *парагруппой*, если в нем выполнены аксиомы $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$;

в) $\mathfrak{IK}$-*парагруппой*, если в нем выполнены аксиомы $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$:

$\mathfrak{A}$. Для любых $a, b, c \in G$: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (ассоциативность).

$\mathfrak{I}$. Для любого $a \in G$: $a \oplus a = a$ (идемпотентность).

$\mathfrak{K}$. Для любых $a, b \in G$: $a \oplus b = b \oplus a$ (коммутативность).

$\mathfrak{N}$. Существует $o \in G$, такой, что для любого $a \in G$: $o \oplus a = a \oplus o = a$ (наличие нейтрального элемента).

$\mathfrak{O}$. Для любого $a \in G$ существует $b \in G$: $b \oplus a = a \oplus b = o$ (обратимость).

Рассмотрим на множестве G n-арную операцию, $n \geq 2$, $\oplus_n : G \times \ldots \times G \to G$. Если для любого элемента $a \in G$ выполнено равенство $\oplus_n (a, \ldots, a) = a$, то операция называется *идемпотентной*. Если для любого набора элементов $(a_1, \ldots, a_n)$ и для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ выполнено равенство $\oplus_n (a_1, \ldots, a_n) = \oplus_n (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$, то операция называется *симметричной*.

Тройку элементов (a_1, a_2, a_3) группоида $(G,\circ)$ назовем

а) *ассоциативной*, если выполнено равенство $(a_1 \oplus a_2) \oplus a_3 = a_1 \oplus (a_2 \oplus a_3)$,

б) *симметрично-ассоциативной*, если однозначно определен элемент, равный сумме элементов в любом порядке и при любой расстановке скобок

$$(a_1 \oplus a_2) \oplus a_3 = a_1 \oplus (a_2 \oplus a_3) = \left(a_{\sigma(1)} \oplus a_{\sigma(2)}\right) \oplus a_{\sigma(3)} = a_{\sigma(1)} \oplus (a_{\sigma(2)} \oplus a_{\sigma(3)}).$$

Определим на $\mathfrak{IK}$ -группоиде $(G,\oplus)$ тернарную операцию $[a, b, c] = (a \oplus b) \oplus c$. Сопоставление $\mathfrak{S}: (a, b, c) \mapsto ([a, b, c], [b, c, a], [c, a, b])$ будем называть *шагом симметризации*.

Наименьшее число s такое, что $\mathfrak{S}^{s+1}(a, b, c) = (d, d, d)$ для некоторого d, будем называть *степенью неассоциативности* тройки (a, b, c) $\mathfrak{IK}$ -группоида и писать $s = dna(a, b, c)$. Если такое число не определено, будем говорить, что степень неассоциативности тройки бесконечна и тройка является *вполне неассоциативной*.

Степенью неассоциативности $\mathfrak{IK}$-группоида $(G,\oplus)$ будем называть символ $DNA(G) = sup_{a,b,c \in G} dna(a, b, c)$. В случае $DNA(G) = \infty$ будем говорить, что группоид *вполне неассоциативен*.

Для $\mathfrak{IK}$ -группоида $(G,\oplus)$ конечной степени неассоциативности s зададим тернарную операцию $\widehat{\oplus}(a, b, c) = [\mathfrak{S}^s(a, b, c)]$. Исходя из построения, эта операция является симметричной, идемпотентной и на множестве всех симметрично-ассоциативных троек относительно бинарной операции $\oplus$ совпадает с их суммой. Операция $\widehat{\oplus}$ называется *продолжением* $\oplus$. В установившейся терминологии построенная тернарная операция является *бинарно разложимой*. Например, при $DNA(G,\oplus) = 1$

$$\widehat{\oplus}(a, b, c) = \Big(\big((a \oplus b) \oplus c\big) \oplus \big((b \oplus c) \oplus a\big)\Big) \oplus ((c \oplus a) \oplus b).$$

В рамках проблематики данной статьи продолжение бинарной операции мы будем называть *справедливым турниром*.

Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим множество G_n упорядоченных разбиений отрезка натурального ряда $[1, \ldots, n]$. Количество элементов этого множества называется числом Фубини или упорядоченным числом Белла.

Для каждого упорядоченного разбиения сопоставим последовательность длины n по следующему правилу: на первом месте стоит номер группы по порядку, в которую входит 1, на втором номер группы, содержащей 2, и т.д. Такое сопоставление является взаимно однозначным.

Множество G_n естественным образом разбивается на подмножества $G_{n,k}$ по количеству $k, k = 1, \ldots, n,$ групп разбиений исходного отрезка. Каждая группа в нашей нумерации состоит из всех последовательностей длины n, в котором участвуют лишь числа $1, \ldots, k$ и каждое не менее одного раза.

В приложениях, в которых элементы множества G_n интерпретируются как ранжированный список предпочтений, рассматривается действие, сопоставляющее нескольким ранжированным спискам, так называемый агрегированный список.

Агрегированной суммой (суммой Борда) $\uplus_s$ последовательностей из G_n называется последовательность, полученная по следующему правилу: последовательности складываются векторно, каждому числу в полученной последовательности сумм присваивается его номер по порядку возрастания, причем, одинаковым суммам присваивается одинаковый номер.

Например,

$$(1,2,3,4) + (2,1,3,4) = (3,3,6,8);$$
$$(1,2,3,4) \uplus_2 (2,1,3,4) = (1,1,2,3).$$

Теорема [7]. Группоид $(G_n, \uplus_2)$ является $\mathfrak{IK}$-парагруппой. Для любого s операция $\uplus_s$ является симметричной и идемпотентной s-арной операцией.

Докажем основной результат исследования.

Теорема. Для любого n, $n \geq 3$, на множестве G_n упорядоченных разбиений не существует идемпотентной коммутативной бинарной операции с нейтральным элементом, порождающей тернарную агрегированную сумму $\uplus_3$.

Доказательство разобьём на несколько шагов.

Лемма. Если $\mathfrak{IK}$-группоид $(G_n, \oplus)$, $n \geq 1$, содержит нейтральный элемент o и тернарное продолжение $\widehat{\oplus}$ совпадает с тернарной операцией $\uplus_3$, то для любых $a, b \in G_n$ выполнено тождество

$$a \oplus b = \uplus_3 (a, b, \overline{1}).$$

Доказательство. Осуществим шаг симметризации для тройки элементов группоида $(\overline{1}, \overline{1}, o)$

$$[\overline{1}, \overline{1}, o] = (\overline{1} \oplus \overline{1}) \oplus o = \overline{1} \oplus \overline{1} = \overline{1},$$

в силу нейтральности o, коммутативности и идемпотентности $\oplus$. Этот же элемент порождается и двумя другими циклическими перестановками тройки. Таким образом, рассматриваемая тройка является симметрично-ассоциативной и, следовательно, $\widehat{\oplus} (\overline{1}, \overline{1}, o) = \overline{1}$. По условию, этот элемент совпадает с агрегированной суммой $\uplus_3 (\overline{1}, \overline{1}, o) = o$. Мы получили равенство двух элементов $o = \overline{1}$.

Далее для любых $a, b \in G_n$ рассмотрим тройку (a, b, o) и осуществим шаг симметризации.

$$[a, b, o] = (a \oplus b) \oplus o = a \oplus b;$$
$$[b, o, a] = (b \oplus o) \oplus a = a \oplus b;$$
$$[o, a, b] = (o \oplus a) \oplus b = a \oplus b.$$

Таким образом,

$$\uplus_3 (a, b, \overline{1}) = \widehat{\oplus} (a, b, o) = a \oplus b.$$

Что и требовалось доказать. ■

Лемма. Для любого $n,\ n \geq 3$, тернарная агрегированная сумма $\uplus_3$ не является продолжением бинарной агрегированной суммы $\uplus_2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно предъявить тройку элементов, для которой значение тернарного продолжения $\widehat{\bigoplus}_2$ и тернарной агрегированной суммы $\uplus_3$ не совпадают. Рассмотрим тройку

$$a = b = (1,2,3,4, \dots, n);\ \ c = (3,1,2,4, \dots, n).$$

При $n = 3$ рассматриваем только первые три цифры в наборах. Выполним шаг симметризации

$$(a \uplus_2 a) \uplus_2 c = a \uplus_2 c.$$
$$(1,2,3, \dots) + (3,1,2, \dots) = (4,3,5, \dots);$$
$$(1,2,3, \dots) \uplus_2 (3,1,2, \dots) = (2,1,3, \dots) =: d;$$
$$(a \uplus_2 c) \uplus_2 a = d \uplus_2 a.$$
$$(1,2,3, \dots) + (2,1,3, \dots) = (3,3,6, \dots);$$
$$(1,2,3, \dots) \uplus_2 (2,1,3, \dots) = (1,1,2, \dots) =: f.$$

Мы получили новую тройку $\mathfrak{S}(a, b, c) = (d, f, f)$. Далее,

$$d \uplus_2 f = (2,1,3, \dots) \uplus_2 (1,1,2, \dots) = (2,1,3, \dots) = d;$$

Следовательно, следующий шаг симметризации дает тривиальный набор (d,d,d) , т.е. $\widehat{\bigoplus}_2\ (a, b, c) = d$.

С другой стороны, $(1,2,3, \dots) + (1,2,3, \dots) + (3,1,2, \dots) = (5,5,8, \dots);\ \uplus_3\ (a, b, c) = f$. Доказательство завершено. ■

Доказательство теоремы 1. В условиях теоремы из леммы 1 следует, что нейтральный элемент $\overline{1}$ является проективным для тернарной агрегированной суммы $\uplus_3$ и порождает данную бинарную операцию. С другой стороны, проекция тернарной агрегированной суммы является бинарной агрегированной суммой $\uplus_2$. По лемме 2, тернарная агрегированная сумма не является продолжением бинарной агрегированной суммы. Мы получили противоречие. ■

Следствие. При любом $n, n \geq 3$, универсальная алгебра $(G_n, \uplus_2, \uplus_3)$ не является естественной, т.е. тернарная сумма Борда не может быть реализована как справедливый турнир, основанный даже на самой бинарной сумме Борда.

В силу того что у тернарной агрегированной суммы существует единственный проективный элемент $\overline{1}$, проекция ее совпадает с бинарной агрегированной суммой, и потому замена последней на любую другую бинарную операцию не породит естественной алгебры. Однако вопрос об абстрактной бинарной разложимости тернарной суммы (т.е. существование турнира, который не обязательно является справедливым) остается открытым. Большой интерес также представляет аналогичный вопрос об естественности Парето суммы и является предметом дальнейших исследований авторов.

Список литературы

1. Болотов В.А., Мотова Г.Н., Наводнов В.Г., Рыжакова О.Е. Как сконструировать национальный агрегированный рейтинг? // Высшее образование в России. 2020. – № 1. – С.9-24.
2. Болотов В.А., Мотова Г.Н., Наводнов В.Г. Глобальный агрегированный рейтинг вузов: российский след // Высшее образование в России, 2021. – № 3. – С. 9-25.
3. Кальницкий В.С., Молоков И.Е. Чартерный анализ предпочтений в стохастическом потоке событий // статья в сборнике международной научно-практической конференции: Предиктивный характер научных исследований и практика их реализации в условиях глобального кризиса в экономике и обществе: сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции. – СПб.: Изд-во СПбГЭУ, 2020. – С. 126-130.
4. Кальницкий В.С., Петров А.Н. Структура идемпотентной коммутативной парагруппы на множестве упорядоченных разбиений // Научное наследие академика Л.В. Канторовича и его воплощение в современной экономике и технике: материалы V Всероссийской научно-практической конференции. – Санкт-Петербург: ВИ (ИТ) ВА МТО, 2021. – С. 55-60.

5. Мартенс О.В. Парето расслоение совокупности наблюдаемых процессов массового характера // Региональные аспекты управления, экономики и права Северо-Западного Федерального округа России. – 2021. – 3 (54). – С. 31-35.
6. Кальницкий В.С. Ранжирование вузов методом чартерного анализа многомерного векторного массива // Новые технологии оценки качества образования: сборник материалов XVI Форума Гильдии экспертов в сфере профессионального образования / под общей редакцией д.п.н. Г.Н. Мотовой. – М.: Гильдия экспертов в сфере профессионального образования, 2021. – С. 64-66.
7. Кальницкий В.С., Петров А.Н. О степени неассоциативности идемпотентного коммутативного группоида // Естественные и технические науки. – 2021. – 3. – С. 17-23.
8. Кальницкий В.С. О бинарной неразложимости тернарной суммы Борда // Наука СПбГУ–2021. Сборник материалов Всероссийской конференции по естественным и гуманитарным наукам с международным участием, 28 декабря 2021 года. – СПб.: ООО «Свое издательство», 2022. – С. 96

AGGREGATED RANKING
AS A RESULT OF A FAIRLY ORGANIZED TOURNAMENT

Kalnitsky V.S., Molkov I.E.
Military Academy of Logistics
e-mail: skalnitsky@hotmail.com, mie78italy@mail.ru

Abstract. *The article discusses some aspects of the use of rating aggregation operations related to the implementation of these operations in the form of fair tournaments. It is shown that the well-known and often used the Borda method even for three ratings cannot be described as the result of a fairly organized tournament, even if it is used as pairwise comparisons. The article gives an exact mathematical description of this problem.*
Keywords: *aggregated rating, charter analysis, the Borda method.*